KSMF snopy i rozmaitości

Konrad Gębik

Marzec 2026

1 Podstawy

Tutaj lista pojęć, które będą dalej potrzebne, wraz z odnośnikami do sekcji książki T. Wedhorna *„Manifolds, sheaves and cohomology”*:

- Snopy, źdźbła i ich morfizmy — sekcje 3.1 i 3.2,
- Obraz prosty snopa — sekcja 3.5
- Przestrzenie (lokalnie) opierścienione — sekcja 4.1
- Rozmaitości jako przestrzenie opierścienione — sekcja 4.2

2 Rozmaitości

W tej notatce zajmiemy się dokładnym sprawdzeniem, że definicja rozmaitości podana w *„Manifolds, sheaves and cohomology”* jest równoważna definicji klasycznej, zadającej rozmaitość jako przestrzeń topologiczną wraz z klasą równoważności jej atlasów. Mówiąc dokładniej, pokażemy, że kategoria rozmaitości snopowych (tj. zadanych zgodnie z definicją z *„Manifolds, sheaves and cohomology”*) ManSh_k jest równoważna kategorii rozmaitości klasycznych ManAt_k.

Zaczniemy od przytoczenia pewnych własności rozmaitości z ManSh_k. Zdefiniujmy najpierw morfizmy ewaluacji cięć w punkcie ev_x dla dowolnej rozmaitości z ManSh_k. Niech $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{M,x}$ będzie ideałem maksymalnym w źdźble w punkcie x rozmaitości $(M, \mathcal{O}_M)$ (pamiętajmy, że źdźbła rozmaitości są z definicji lokalne, więc ów ideał jest zadany jednoznacznie). Zauważmy, że ze względu na lokalną izomorficzność $\mathcal{O}_{M,x}$ z $\mathcal{C}^k_{\mathbb{R}^n,y}$ dla pewnego $y \in \mathbb{R}^n$ mamy $\mathcal{O}_{M,x}/\mathfrak{m}_x \simeq \mathcal{C}^k_{\mathbb{R}^n,y}/\mathfrak{n}_y \simeq \mathbb{R}$, gdzie $\mathfrak{n}_x \subset \mathcal{C}^k_{\mathbb{R}^n,x}$ jest ideałem maksymalnym. Niech więc $\varphi_x : \mathcal{O}_{M,x}/\mathfrak{m}_x \to \mathbb{R}$ będzie izomorfizmem pierścieni, a $i_{U,x} : \mathcal{O}_M(U) \to \mathcal{O}_{M,x}/\mathfrak{m}_x$ rzutem kanonicznym ($x \in U$). Zwróćmy uwagę na fakt, iż izomorfizm φ_x jest unikalny — niech ψ_x będzie drugim takim izomorfizmem, wtedy $\varphi_x \circ \psi_x^{-1}$ jest automorfizmem $\mathbb{R}$. Można jednak pokazać, że $\mathbb{R}$ posiada tylko jeden automorfizm i jest nim $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, wobec czego $\psi_x = \varphi_x$. Pozwala to nam w sposób jednoznaczny zdefiniować morfizmy ewaluacji $\mathrm{ev}_x = \varphi_x \circ i_{U,x}$.

Stwierdzenie 2.1. Niech $(M, \mathcal{O}_M) \in \mathrm{ManSh}_k$ oraz niech $s, t \in \mathcal{O}_M(U)$. Wtedy $s = t$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x \in U$ mamy $\mathrm{ev}_x(s) = \mathrm{ev}_x(t)$

Dowód. Fakt, że $s = t$ implikuje $\mathrm{ev}_x(s) = \mathrm{ev}_x(t)$ jest oczywisty, więc zostaje rozważyć implikację w przeciwnym kierunku. Niech więc s, t spełniają $\mathrm{ev}_x(s) = \mathrm{ev}_x(t)$ dla wszystkich $x \in U$. Dla każdego x możemy znaleźć jego otoczenie $U_x \subset U$ dla którego $(U_x, \mathcal{O}_M|_{U_x})$ jest izomorficzne do $(V_x, \mathcal{C}^k_{V_x})$ dla pewnego $V_x \subset \mathbb{R}^n$. Izomorfizm tych dwóch przestrzeni oznaczymy jako (ϕ, ϕ^*). Weźmy teraz $f_x, g_x \in \mathcal{C}^k_{\mathbb{R}^n}(V_x)$ takie, że $\phi^*(f_x) = s|_{U_x}$, $\phi^*(g_x) = t|_{U_x}$. Ponadto, jeśli φ_x zdefiniujemy tak jak przy zadawaniu ev_x, to zachodzić będzie $\varphi_{\phi(x)} = \varphi_x \circ \phi_x$, ponieważ $\varphi_{\phi(x)} \circ (\varphi_x \circ \phi_x)^{-1}$ jest automorfizmem $\mathbb{R}$, wobec czego jest identycznością (skorzystaliśmy z faktu, że ϕ_x są lokalne, więc indukują morfizmy $\phi_x : \mathcal{C}^k_{\mathbb{R}^n,\phi(x)}/\mathfrak{n}_{\phi(x)} \to \mathcal{O}_{M,x}/\mathfrak{m}_x$). Mamy więc

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}_{\phi(x)}(f_x) = \varphi_{\phi(x)} \circ i_{V_x,\phi(x)}(f_x) = \varphi_x \circ \phi_x \circ i_{V_x,\phi(x)}(f_x) = \\ = \varphi_x \circ i_{U_x,x} \circ \phi^*(f_x) = \mathrm{ev}_x(s)\end{aligned}$$

oraz analogicznie $\mathrm{ev}_{\phi(x)}(g_x) = \mathrm{ev}_x(t)$. Oznacza to, że $f_x = g_x$ dla wszystkich x, a zatem i $s|_{U_x} = t|_{U_x}$, ponieważ ϕ^* jest izomorfizmem. Ale s i t są unikalnymi sklejeniami rodzin $s|_{U_x}$ i $t|_{U_x}$, więc otrzymujemy $s = t$. □

Stwierdzenie 2.2. Niech $(\phi, \phi^*) : (M, \mathcal{O}_M) \to (N, \mathcal{O}_N)$ będzie morfizmem rozmaitości, $s \in \mathcal{O}_N(U)$ Wtedy ϕ^* jest w pełni zadane przez ϕ zgodnie z równością $\mathrm{ev}_x(\phi^*(s)) = \mathrm{ev}_{\phi(x)}(s)$ dla wszystkich $x \in U$.

Dowód. Wedhorn, *„Manifolds, sheaves and cohomology"*, sekcja 4.2, stwierdzenie 4.18 □

Korzystając z powyższych stwierdzeń jesteśmy w stanie pokazać, że zaproponowana alternatywna definicja rozmaitości jest równoważna definicji standardowej. W tym celu zadamy parę funktorów $F : \mathrm{ManAt}_k \to \mathrm{ManSh}_k$ oraz $G : \mathrm{ManSh}_k \to \mathrm{ManAt}_k$ zadających równoważność kategorii ManAt_k oraz ManSh_k. Funktor F będzie naturalną inkluzją ManAt_k w ManSh_k, tj. zadamy go przez $F(M) = (M, \mathcal{C}^k_M)$, gdzie $\mathcal{C}^k_M$ jest snopem funkcji C^k na M, natomiast $F(\phi) = (\phi, \cdot \circ \phi)$.

Definicja funktora G będzie wymagać od nas natomiast nieco więcej uwagi. Aby zdefiniować $G((M, \mathcal{O}_M))$ musimy zadać zarówno przestrzeń topologiczną jak i jej strukturę różniczkową, co zrobimy przez wybranie konkretnego atlasu. W szczególności położymy $G((M, \mathcal{O}_M)) = M$ z atlasem zadanym przez homeomorfizmy ϕ_i tworzące izomorfizmy $(\phi_i, \phi_i^*) : (U_i, \mathcal{O}_M|_{U_i}) \simeq (V_i, \mathcal{C}^k_{V_i})$, gdzie U_i tworzą otwarte pokrycie M, natomiast $V_i \subset \mathbb{R}^n$. Ponieważ $(M, \mathcal{O}_M) \in \mathrm{ManSh}_k$, rodzina takich homeomorfizmów na pewno istnieje, ale aby funktor G był dobrze zdefiniowany, musimy sprawdzić jeszcze dwie rzeczy: czy dowolne dwie rodziny takich homeomorfizmów ϕ_i oraz ψ_j zadają równoważne struktury różniczkowe na M, oraz czy zadana przez nie struktura rzeczywiście jest gładka klasy C^k.

Zaczniemy od sprawdzenia pierwszej z nich. W tym celu musimy zbadać, czy odwzorowania $\phi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(U_{ij}) \to \phi_i(U_{ij})$ są klasy C^k dla dwóch rodzin homeomorfizmów $\phi_i : U_i \to V_i$ i $\psi_j : U'_j \to V'_j$ (zadających izomorfizmy w ManSh_k jak wyżej) oraz $U_{ij} = U_i \cap U'_j$. W tym celu wystarczy sprawdzić, czy funkcje $x_\alpha \circ \phi_i \circ \psi_j^{-1}$, gdzie $x_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ to funkcje zwracające α-tą współrzędną punktu, są klasy C^k dla wszystkich α (fakt z analizy). Zauważmy, że aplikując stwierdzenie 2.2 do dla $x \in \psi_j(U_{ij})$ mamy

$$\mathrm{ev}_x(((\psi_j^*)^{-1} \circ \phi_i^*)(x_\alpha)) = \mathrm{ev}_{(\phi_i \circ \psi_j^{-1})(x)}(x_\alpha) = x_\alpha \circ \phi_i \circ \psi_j^{-1}\,(x),$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że $(\phi_i, \phi_i^*) \circ (\psi_j, \psi_j^*)^{-1} = (\phi_i \circ \psi_j^{-1}, (\psi_j^*)^{-1} \circ \phi_i^*)$ jest morfizmem w ManSh_k. Wobec tego $((\psi_j^*)^{-1} \circ \phi_i^*)(x_\alpha) = x_\alpha \circ \phi_i \circ \psi_j^{-1}$, a więc $x_\alpha \circ \phi_i \circ \psi_j^{-1} \in \mathcal{C}^k_{\psi_j(U_{ij})}(\psi_j(U_{ij}))$, gdyż przeciwdziedziną $((\psi_j^*)^{-1} \circ \phi_i^*)$ są funkcje gładkie na $\psi_j(U_{ij})$.

Gładkość struktury zadanej przez te homeomorfizmy jest wnioskiem powyższego rozumowania przeprowadzonego dla przypadku $\psi_j = \phi_j$. Przekonaliśmy się więc, że poprawnie zadaliśmy funktor G na obiektach ManSh_k. Na morfizmach zadamy go w sposób następujący: $G((\xi, \xi^*)) = \xi$. Gładkość odwzorowania ξ w wybranej przez nas strukturze różniczkowej możemy sprawdzić rozumowaniem analogicznym do tego, które wykorzystaliśmy przy sprawdzaniu gładkości samej struktury (potrzeba jedynie sprawdzić, że $x_\alpha \circ \psi^{-1} \circ \xi \circ \phi$ są gładkie).

Zdefiniowaliśmy funktory F i G, możemy więc teraz sprawdzić, czy rzeczywiście zadają one równoważność kategorii, tj. że funktory $F \circ G$ i $G \circ F$ są naturalnie izomorficzne do funktorów identycznościowych na kategoriach odpowiednio ManSh_k i ManAt_k. Najpierw zbadajmy funktor $G \circ F$ na obiektach ManAt_k. Mamy $G \circ F(M) = G((M, \mathcal{C}^k_M))$. Niech $\phi_i : M \supset U_i \to V_i$ będzie dowolną rodziną homeomorfizmów zadającą atlas M. Zadaje ona również rodzinę lokalnych izomorfizmów $(M, \mathcal{C}^k_M)$ z $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^k_{\mathbb{R}^n})$ (są nimi $F(\phi_i)$), wobec czego struktura rózniczkowa, w którą G wyposaża przestrzeń topologiczną M jest zadana przez ϕ_i, wobec czego mamy $G \circ F(M) = M$. Na morfizmach również widzimy, że $G \circ F(\phi) = G((\phi, \cdot \circ \phi)) = \phi$, czyli otrzymujemy $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathrm{ManAt}_k}$.

Przejdźmy teraz do funktora $F \circ G$. Łatwo stwierdzamy, że $F \circ G((M, \mathcal{O}_M)) = (M, \mathcal{C}^k_M)$. Aby zadać izomorfizm naturalny $F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{ManAt}_k}$ musimy więc wybrać izomorfizm między $(M, \mathcal{O}_M)$ a $(M, \mathcal{C}^k_M)$ dla każdego $(M, \mathcal{O}_M) \in \mathrm{ManSh}_k$. W tym celu oznaczymy jako (ϕ_i, ϕ_i^*) rodzinę lokalnych izomorfizmów $(M, \mathcal{O}_M)$ z $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^k_{\mathbb{R}^n})$. Zgodnie z własnościami funktorów F i G widzimy, że morfizmy $(\phi_i, \cdot \circ \phi_i)$ zadają więc lokalne izomorfizmy $(M, \mathcal{C}^k_M)$ z $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^k_{\mathbb{R}^n})$. Wobec tego możemy rozważyć złożenia (ϕ_i, ϕ_i^*) z odwrotnościami $(\phi_i, \cdot \circ \phi_i)$, wynoszące $(\mathrm{id}_{U_i}, \phi_i^*(\cdot \circ \phi_i^{-1}))$ ($U_i \subset M$ są dziedzinami ϕ_i) i będące izomorfizmami $(U_i, \mathcal{O}_M|_{U_i})$ z $(U_i, \mathcal{C}^k_{U_i})$. Izomorfizmy te możemy skleić do jednego izomorfizmu (id_M, ϕ^*) z $(M, \mathcal{O}_M)$ w $(M, \mathcal{C}^k_M)$ o własności $\phi^*(s) = \phi_i^*(s \circ \phi_i^{-1})$ dla $s \in \mathcal{C}^k_M(V)$, gdzie $V \subset U_i$. Jest to możliwe ponieważ U_i tworzą pokrycie M, a dla dowolnego cięcia s prawdą jest, że $\phi_i^*(s|_{U_i} \circ \phi_i^{-1})|_{U_{ij}} = \phi_j^*(s|_{U_j} \circ \phi_j^{-1})|_{U_{ij}}$, o czym możemy przekonać się porównując wartości obu cięć w $x \in U_{ij}$ (stw. 2.1):

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}_x(\phi_i^*(s|_{U_i} \circ \phi_i^{-1})) = (s \circ \phi_i^{-1} \circ \phi_i)(x) = s(x) = \\ = (s \circ \phi_j^{-1} \circ \phi_j)(x) = \mathrm{ev}_x(\phi_j^*(s|_{U_j} \circ \phi_j^{-1})).\end{aligned}$$

Wobec tego $\phi^*(s)$ możemy zadać jako unikalne sklejenie $\phi_i^*(s|_{U_i} \circ \phi_i^{-1})$ dla wszystkich i. Co więcej spełnia ono $\mathrm{ev}_x(\phi^*(s)) = s(x)$.

Skonstruowaliśmy więc rodzinę izomorfizmów $(M, \mathcal{O}_M) \simeq (M, \mathcal{C}^k_M)$, ale musimy jeszcze sprawdzić jej naturalność. Niech więc $(\xi, \xi^*) : (M, \mathcal{O}_M) \to (N, \mathcal{O}_N)$, a $(\mathrm{id}_M, \phi^*) : (M, \mathcal{O}_M) \simeq (M, \mathcal{C}^k_M)$ oraz $(\mathrm{id}_N, \psi^*) : (N, \mathcal{O}_N) \simeq (N, \mathcal{C}^k_N)$ będą izomorfizmami tworzącymi proponowany przez nas izomorfizm naturalny. Chcemy pokazać, że $(\mathrm{id}_N, \psi^*) \circ (\xi, \xi^*) = (\xi, \cdot \circ \xi) \circ (\mathrm{id}_M, \phi^*)$. Równość pierwszych składowych jest natychmiastowa, natomiast dla drugich składowych mamy

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}_x((\xi^* \circ \psi^*)(s)) = \mathrm{ev}_{\xi(x)}(\psi_j^*(s \circ \psi_j^{-1})) = s(\xi(x)) = \\ = \mathrm{ev}_x(\phi_i^*(s \circ \xi \circ \psi_i^{-1}) = \mathrm{ev}_x(\phi^*(s \circ \xi)),\end{aligned}$$

gdzie i, j dobieramy tak, aby punkt x należał do dziedzin ψ_j i ϕ_i.

Udało się nam więc pokazać, że funktory F i G zadają żądaną równoważność kategorii, uzasadniając tym samym sensowność definicji rozmaitości jako przestrzeni lokalnie opierścienionych. Dużą zaletą tego podejścia jest fakt, iż pozwala ono na łatwe rozszerzanie pojęcia rozmaitości do bardziej ogólnych kontekstów, takich jak schematy czy superrozmaitości.